Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Институт математики
Национальной академии наук Армении

Второе российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам

Москва, МИАН, 5–11 октября 2008 г.

Организационный комитет:
В.В. Козлов (сопредседатель, МИАН),
Н.У. Аракелян (сопредседатель, ИМ НАН РА),
И.В. Волович (зам. сопредседателя, МИАН),
Е.М. Чирка (зам. сопредседателя, МИАН),
Б.Т. Батикян (зам. сопредседателя, ИМ НАН РА),
Н.Б. Енгибарян (зам. сопредседателя, ИМ НАН РА),
С.В. Козырев (ученый секретарь, МИАН),
Р.В. Амбарцумян (ИМ НАН РА),
В.С. Владимиров (МИАН),
А.А. Гончар (МИАН),
А.К. Гущин (МИАН),
Ю.Н. Дрожжинов (МИАН),
В.А. Мартиросян (ИМ НАН РА),
В.П. Михайлов (МИАН),
А.Б. Нерсесян (ИМ НАН РА),
А.Г. Сергеев (МИАН),
Д.В. Трещёв (МИАН),
А.Х. Хачатрян (ИМ НАН РА).

http://raw2008.mi.ras.ru/
http://math.sci.am/conference/oct2008/

Список приглашённых

1. Г. Т. Аванесян
   Институт математики НАН Армении
2. С. И. Адян
   Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
3. Г. М. Айрапетян
   Армянский государственный инженерный университет
4. М. Т. Акопян
   Институт математики НАН РА
5. Р. В. Амбарцумян
   Институт математики НАН Армении
6. Д. В. Аносов
   Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
7. Л. Г. Арабаджян
   Институт математики НАН Армении
8. Н. У. Аракелян
   Институт математики НАН Армении
9. Б. Г. Араркцян
   Ереванский государственный университет
10. Т. Н. Арутюнян
    Ереванский государственный университет
11. А. Г. Барсегян
    Институт математики НАН Армении
12. Г. А. Барсегян
    Институт математики НАН Армении

13. Б. Т. Батикян

    Институт математики НАН Армении

14. В. И. Буслаев

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

15. В. С. Владимиров

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

16. И. В. Волович

    Математический институт им В.А. Стеклова РАН

17. А. А. Гончар

    Математический институт им В.А. Стеклова РАН

18. Г. А. Григорян

    Институт математики НАН Аремении

19. А. К. Гущин

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

20. А. М. Джрбашян

    Институт математики НАН Армении

21. А. В. Домрин

    Московский государственный университет
    им. М.В. Ломоносова

22. Ю. Н. Дрожжинов

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

23. В. Ж. Думанян

    Ереванский государственный университет

24. Б. Н. Енгибарян

    Институт математики НАН Армении

25. Н. Б. Енгибарян

    Институт математики НАН Армении

26. В. В. Жаринов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

27. Б. И. Завьялов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

28. Е. И. Зеленов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

29. С. М. Ивашкович

University of Sciences and Technologies, Lille, France

30. М. Э. Казарян

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

31. Б. С. Кашин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

32. В. В. Козлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

33. С. В. Козырев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

34. А. В. Комлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

35. С. П. Коновалов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

36. Н. Г. Кружилин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

37. В. А. Мартиросян

Ереванский государственный университет

38. Н. Г. Марчук

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

39. М. С. Мельников

    Universitat Autonoma de Barcelona, Spain

40. В. П. Михайлов

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

41. Е. Н. Михалкин

    Сибирский федеральный университет, Красноярск

42. М. Г. Мурадян

    Институт математики НАН Армении

43. С. Ю. Немировский

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

44. А. Б. Нерсесян

    Институт математики НАН Армении

45. Р. В. Пальвелев

    Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

46. П. В. Парамонов

    Московский государственный университет
    им. М.В. Ломоносова

47. А. И. Петросян

    Институт математики НАН Армении

48. Д. Ю. Почекутов

    Сибирский федеральный университет, Красноярск

49. Е. В. Писковский

    Московский физико-технический институт
    (государственный университет)

50. А. Садуллаев

    Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми,
    Узбекистан

51. А. Г. Сергеев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
52. А. Н. Сисакян
Объединённый институт ядерных исследований, Дубна
53. С. П. Суетин
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
54. Ц. Э. Терджян
Институт математики НАН Армении
55. Д. В. Трещёв
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
56. А. С. Трушечкин
Математический институт им В.А. Стеклова РАН
57. А. Х. Хачатрян
Институт математики НАН Армении
58. Х. А. Хачатрян
Институт математики НАН Армении
59. А. К. Цих
Сибирский федеральный университет, Красноярск
60. Е. М. Чирка
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
61. В. В. Чуешев
Сибирский федеральный университет, Красноярск

О локализованных асимптотических аппроксимациях целых функций

Г. Т. Аванесян

Институт математики НАН Армении

avangt@instmath.sci.am

Теорема Бальяна-Лоу о локализации служит препятствием на пути непосредственного осуществления идей Дж. фон Неймана и Д. Габора о представлении векторов гильбертова пространства с помощью ортонормированного и локализованного базиса на решетке в комплексной плоскости. Однако это препятствие может быть преодолено путем использования некоторой специальной функции, обладающей сильным свойством (экспоненциальной) локализации [1]. С помощью той же функции оказывается возможным разрешить проблему локализованных асимптотических приближений целых функций. Предлаемая новый конструкция, основывающаяся на сдвигах единственной целой функции, может оказаться весьма эффективной также и для численных расчетов в квантовой механике в фазовом пространстве, а также и при обработке сигналов.

Ключевым для описываемого метода служит подход, основанный на рассмотрении максимальной антикоммутативной дискретной подгруппы группы Вейля–Гейзенберга, в отличие от ранее применявшихся подходов на основе максимальной коммутативной дискретной подгруппы этой группы. При этом пространство Гильберта служит пространством неприводимого представления группы Вейля–Гейзенберга. Следует отметить также тесную связь рассматриваемых вопросов с теорией тэта-функций Якоби. Целая функция $a(z)$, лежащая в основе описываемой конструкции, допускает представление в виде произведения

$$a(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2}\alpha(z)\alpha(iz), \tag{1}$$

где

$$\alpha(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n e^{-\pi n} e^{-\pi n^2} cos(\sqrt{\pi} n z). \tag{2}$$

Коэффициенты α_n ведут себя вполне регулярно; первые десять коэффициентов таковы: 0.501052, 0.375586, 0.312961, 0.273833, 0.246446, 0.225907, 0.20977, 0.196654, 0.185718, 0.174832. Разработанный алгоритм асимптотической аппроксимации с использованием приведенной целой функции обладает преимуществом быстрой сходимости, аналогичным вычислениям с помощью тэта-функций; другое преимущество - возможность распараллеливания вычислений на основных их этапах.

Применения результатов настоящего сообщения не ограничиваются пространством целых функций. Унитарное отображение рассматриваемого пространства Баргмана $E_2(\mathbb{C})$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int\int e^{-y^2}|f(x+iy)|^2\,dx\,dy, \tag{3}$$

в пространство $L_2(\mathbb{R})$ позволяет перенести полученные результаты в последнее пространство, сохранив при этом свойства симметрии по отношению к преобразованиям группы Вейля–Гейзенберга, что весьма важно ввиду приложений к теории обработки сигналов. Задача о разложении сигналов на "элементарные высказанная Габором, находит свое решение в рамках пары взаимодуальных решеток фон Неймана.

Алгоритм реконструкции, описанный выше основан на установленной в [2] связи между сдвигами в некоммутативной плоскости и трехмерными вращениями. Двойное отображение тора на сферу представлено отображением Хопфа в композиции со стереографической проекцией.

Образ основной целой функции при ее отображении в пространство $L_2(\mathbb{R})$ инвариантен по отношению к преобразованию Фурье, благодаря использованному ограничению на случай эквигармонических или лемнискатных эллиптических функций; многие факты относящиеся к этому случаю были известны еще Гауссу, и, в частности, в их отношении к геометрии лемнискаты Бернулли.

Список литературы

[1] G. T. Avanesyan *On asymptotic approximations to entire functions*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 285203 (8pp)

[2] G. T. Avanesyan *On exponential localization of magnetic Wannier functions*, J. Phys.: Condens. Matter **16** (2004) 2357–2369

Некоторые теоремы единственности для гармонических функций

Г. М. Айрапетян

Армянский государственный инженерный университет

hhairapet@seua.am

В данной работе получены следующие теоремы единственности для гармонических функций.

Теорема 1. Пусть $u(x,y)$ ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости и $\sup(|u(x,y)|\exp\varphi(x)) < \infty,\ x \in (-\infty,\infty),\ y \in (0,y_0),\ y_0 > 0$, где $\varphi(x)$ выпуклая относительно логарифма положительная четная функция. Тогда, если $\varphi(x)(1+x^2)^{-2} \notin L^1(-\infty,\infty)$, то $u(z) \equiv 0$.

Имеет место обратное предложение:

Теорема 2. Пусть $g(x)$ медленно меняющаяся функция в бесконечности и $g(x)(1+x^2)^{-1} \in L^1(-\infty,\infty)$. Тогда для любого $h > 0$ существует $c > 0$ такое, что функция

$$u(x,y) = Re\left(exp\frac{-1}{c\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{t-x-iy}\right)$$

удовлетворяет условиям: $u(x,y) \not\equiv 0$ и $sup|u(x,y)|e^{g(x)} < \infty,\ x \in (-\infty,\ \infty), y \in (0,h)$.

Теорема 3. Пусть гармоническая в $R^3_+ = \{(x,y,z), z > 0\}$ функция $U(x,y,z)$ ограничена и

$$\sup|U(x,y,z)|e^{|x|+|y|} < \infty,\ \ (x,y,z) \in R^3_+(z_0),$$

где $R^3_+(z_0) = \{(x, y, z) \in R^3_+,\ \ z \in (0, z_0)\},\ z_0 > 0$. Тогда $U(x, y, z) \equiv 0$.

Эту теорему можно усилить

Теорема 4. Пусть $g(x)$ положительная функция определенная на $(0,\, \infty)$ и $g(x^2 + y^2) > g_1(x)+g_2(y)$, где $\exp(-g_2(y)) \in L^1(-\infty,\, \infty)$, а $g_1(x) > 0$ выпуклая относительно логарифма функция на $(-\infty,\, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(x)}{1 + x^2} dx = \infty. \tag{1}$$

Тогда, если гармоническая в $R^+ = \{(x, y, z), z > 0\}$ функция $U(x, y, z)$ ограничена и $\sup |U(x, y, z)| e^{g(x^2+y^2)} < \infty$, $(x, y, z) \in R^+(z_0)$, то $U(x, y, z) \equiv 0$.

Об уравнении восстановления в многомерном пространстве

М. Т. Акопян

Институт математики НАН Армении

marina_@hotmail.com

Рассматривается уравнение восстановления (УВ) в n – мерном пространстве:

$$f = g + K * f, \tag{1}$$

где

$$(K * f)(x) = \int\limits_{R^n} K(x - t) f(t) dt.$$

Предполагается, что K – плотность распределения случайной величины в R^n:

$$K \geqslant 0, \quad \int\limits_{R^n} K(x) dx = 1.$$

Разрешимость (1) при $g \geqslant 0$ означает, что цепь Маркова со дважды стохастической плотностью переходных вероятностей

$K(x-t)$ обладает инвариантным распределением как при наличии источников g, так и – при их отсутствии (тогда $g = 0$, $f = 1$).

В [1] доказана положительная разрешимость (1) в случае, когда $g \in L_1(R^n)$ и вектор

$$\nu = \int xK(x)dx \neq 0, \tag{2}$$

изучены структура и асимптотические свойства решения. Этот результат является многомерным аналогом и усилением известной теоремы С. Карлина об УВ на всей прямой.

В настоящей работе с использованием результатов [1] доказана разрешимость (1), (2) при более слабых ограничениях на g. Строится резольвентная функция Γ (функции восстановления), определяемой из матричного интегрального уравнения (1) при $g = K$. Далее устанавливается разрешимость (1) и равенство $f = g + \Gamma * g$ для тех g, при которых существует свертка $\Gamma * \|g\|$ как локально интегрируемая функция в R^n. Описны некоторые классы функций g, удовлетворяющих этому условию, и свойства решения соответствующего уравнения (1).

В некоторых частных случаях удается получить более точное описание асимптотики решения, с использованием факторизационного метода работы [2].

Список литературы

[1] Енгибарян Н. Б. Уравнение восстановления в многомерном пространстве, Теория вероятностей и ее применения, Т.49, 4, 2004, С.779-785.

[2] Акопян М. Т., Енгибарян Н. Б. О задачах факторизации в $\mathbb{C}^n$, Сб. Дифференциальные и интегральные уравнения, Ер. 1979, С. 13-23.

Распределения Пальма и случайные раскраски плоскости

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении

О разрешимости одной бесконечной линейной алгебраической системы в особом случае

Л. Г. Арабаджян

Институт математики НАН Армении

matphys@instmath.sci.am, arabajyan@mail.ru

Рассматривается бесконечная алгебраическая система

$$x_i = b_i + \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} x_j\,,\ \ i \in Z_0 \equiv \{0,\,1,\,2,\cdots,n,\cdots\}, \qquad (*)$$

относительно последовательности $x = \{x_0,\, x_1,\, x_2, \cdots\}$. Предполагается, что теплицевая матрица $A = (a_{i-j})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям консервативности

$$a_k \geqslant 0\,,\ k \in Z_0, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 1\,,$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_{\pm k} < \infty \qquad \text{и} \qquad \nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k < 0\,,$$

а последовательности $b = \{b_0,\, b_1,\, b_2, \cdots\}$ и $\lambda = \{\lambda_0,\, \lambda_1,\, \lambda_2, \cdots\}$ удовлетворяют условиям

$$b_k \geqslant 0\,,\ k \in Z_0, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty\,,$$

$$1 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_k^0, \quad \text{где} \quad k \in Z_0, \quad \text{а} \quad \lambda_k^0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sum\limits_{j=-\infty}^{k} a_j}\,.$$

Доказывается, что тогда система (*) обладает ограниченным решением x, $x \in m$.

В случае выполнения равенства $\lambda_k = \lambda_k^0$, $k \in Z_0$ матрица рассматриваемой системы является матрицей, транспонированной к стохастической. Тогда неотрицательными нетривиальными решениями одновременно обладают как однородная, так и неоднородная системы (*).

О некоторых применениях теории приближений целыми функциями

Н. У. Аракелян

Институт математики НАН Армении

arakelian@instmath.sci.am

В докладе приводится краткий обзор результатов по применению теории равномерных и касательных приближений целыми функциями на неограниченных замкнутых множествах комплексной плоскости, включая как результаты о возможности таких приближений, так и результаты о наилучших целых приближениях.

Применения касаются некоторых разделов комплексного анализа и смежных вопросов математической физики. Отметим применения при исследовании граничного поведения и распределения значений аналитических функций (в частности - проблемы дефектных и индексных значений в теории Р. Неванлинны), а также проблемы вейерштрассовской теории аналитических функций. Здесь отметим, в частности, результаты о возможности аналитического продолжения степенных рядов и локализации их особенностей вне круга сходимости (в терминах коэффициентов степенного ряда), об эффективном восстановлении возможного аналитического продолжения матричными методами суммирования, об оптимальной скорости восстановления и т.д.

Представляют интерес также применения целых и гармонических приближений к граничным задачам математической физики (задачам Дирихле, Пуассона и Неймана).

Функция собственных значений семейства операторов Дирака и обратные задачи

Т. Н. Арутюнян

Ереванский государственный университет

hartigr@yahoo.co.uk

Для однопараметрического семейства $\left\{L(p,q,\alpha),\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$ операторов Дирака, порожденных краевыми задачами

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \\ y=\lambda y; \quad x\in(0,\pi), \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda\in C, \\ y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \\ y_1(\pi)=0, \end{cases}$$

где $p,q\in L^1_R[0,\pi]$, вводится понятие функции собственных значений (ФСЗ):

ФСЗ семейства $\left\{L(p,q,\alpha),\ \alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$ называется функция $\lambda(\cdot)$, определенная в каждой точке

$$\gamma=\alpha-\pi m\left(\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \ m\in Z\right)$$

действительной оси по формуле: $\lambda(y)=\lambda(\alpha-\pi m)\overset{\text{def}}{=}\lambda_m(\alpha)$, где $\lambda_m(\alpha)$, $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, есть собственные значения оператора $L(p,q,\alpha)$(пронумерованные по возрастанию индекса).

Находятся необходимые и достаточные условия, при которых некоторая функция является ФСЗ такого семейства операторов.

Доказываются теоремы единственности в обратной задаче (по спектральной функции, по двум спектрам, по значениям ФСЗ $\{\lambda(\gamma_k)\}_{k=1}^{\infty}$ на некоторой сходящейся последовательности $\gamma_k \to \gamma$, по некоторым "новым" спектральным данным).

Дано описание всех операторов Дирака $L(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \alpha)$ с $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in L^1_R[0, \pi]$, "изоспектральных" данному оператору $L(p, q, \alpha)$.

Описаны случаи, когда обратная задача однозначно решается по меньшему набору спектральных данных, чем тот, который требуется в "общем случае" (например, по одному спектру).

Приведено также конструктивное решение некоторых из упомянутых обратных задач.

Уравнение свертки с ядром, представленным через смеси гамма распределений

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН Армении

anibarseghyan@mail.ru

Рассматривается интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda \int\limits_0^r K(x-t) f(t) dt \ , \quad r \leq \infty \, , \tag{1}$$

ядро K которого представлено в следующем виде двусторонней суперпозиции гамма распределений:

$$K(\pm x) = e^{-s^{\pm} x} P_N^{\pm} x \, , \quad x > 0. \tag{2}$$

Здесь $s^{\pm} > 0$, а $P_N^{\pm}$ – полиномы порядка $\leq N$ с неотрицательными коэффициентами:

$$P_N^{\pm}(x) = \sum_{m=0}^{N} a_m^{\pm} \frac{(s^{\pm})^{m+1}}{m!} x^m \, , \;\; a_m^{\pm} \geq 0, \;\; m = 0, 1, \cdots, N.$$

Предполагается что $0 < \lambda \le 1$ и K является плотностю распределения случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = \sum_{m=0}^{N}(a_m^+ + a_m^-) = 1\,.$$

Уравнение (1),(2) представляет интерес в теории случайных блужданий (в случае гиперраспределений Эрланга) и др. Такими уравнениями могут быть приближенно заменены уравнения с более общими ядрами.

В случае уравнения Винера-Хопфа ($r = \infty$) строится факторизация через функции $V^{\pm}(x) = e^{-s^{\pm}x}\sum_{m=0}^{N} b_m^{\pm}\frac{(s^{\pm})^{m+1}}{m!}x^m$. Имеем $b_m^{\pm} = \frac{m!}{(s^{\pm})^{m+1}}p_m^{\pm}$, где $p_m^{\pm} \ge 0$ определяются из следующей нелинейной алгебраической системы:

$$p_m^{\pm} = q_m^{\pm} + \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{N-m} p_{k+m}^{\pm}\frac{(k+m)!}{k!}\sum_{j=0}^{N} p_j^{\mp}\frac{(k+m+j)!}{(s^+ + s^-)^{m+k+j+1}}, \quad m = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N. \tag{3}$$

Здесь $q_m^{\pm} = \frac{(s^{\pm})^{m+1}}{m!}a_m^{\pm}$. Система (3) легко решается простыми итерациями. Резольвентные функции $\Phi^{\pm}$ факторов имеют вид

$$\Phi^{\pm}(x) = e^{-s^{\pm}x}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k^{\pm}\frac{(s^{\pm})^{k+1}}{k!}x^k\,,$$

где коэффициенты $\psi_k^{\pm} \ge 0$ определяются из линейных рекуррентных соотношений:

$$\psi_0^{\pm} = b_0^{\pm}\,,$$
$$\psi_i^{\pm} = b_i^{\pm} + \sum_{j=0}^{N-1} b_j^{\pm}\psi_{i-j-1}^{\pm}\,,\; i = 1, 2, \cdots \quad \text{при} \qquad k \leqslant N,$$
$$\psi_i^{\pm} = \sum_{j=0}^{N} b_j^{\pm}\psi_{i-j-1}^{\pm}\,,\; i = 1, 2, \cdots \quad \text{при} \qquad k > N.$$

С помощью последовательностей $b_k^{\pm}$, $\psi_k^{\pm}$ строится факторизация не только уравнения (1) на полупрямой, но и на конечном промежутке, когда $r < \infty$. Тогда задача сводится к дополнительному решению одной простой линейной алгебраической системы.

Часть результатов работы получена совместно с проф. Н. Б. Енгибаряном.

Some identities and inequalities

G. A. Barsegian
Institute of Mathematics of NAS of Armenia
barseg@instmath.sci.am

In this talk we present some new, sharp and mutually connected identities and inequalities:
in complex analysis (for arbitrary smooth complex function, particularly for analytic ones);
in real analysis (for arbitrary smooth function of two real variables);
in differential geometry (for arbitrary plane curve and arbitrary smooth three dimensional surface);
in algebraic geometry (for arbitrary real algebraic function).

In particular we prove the following

Theorem. *For any bounded domain D with piecewise smooth boundary, any meromorphic function f in $\bar{D}$ and any integer $k \geq 1$ we* *have*

$$\int\int_D \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| d\sigma \le \int\int_D \left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right| d\sigma + \frac{k\pi}{2} l(D),$$

where $l(D)$ *is the length of* ∂D.

The methods we utilize are in touch with Gamma-lines [1]. The problems considered were partly posed in [2].

References.

[1] Barsegian G., *Gamma-lines: on the geometry of real and complex functions,* Taylor and Francis, London, New York, 2002.
[2] Barsegian G., *A new program of investigations in Analysis: Gamma-lines approaches,* p. 1 - 73. In book: Barsegian G., Laine I. and Yang C. C. (editors), Value distribution and related topics, Kluwer, Series: Advances in Complex Analysis and Applications, 2004.

Точки ветвления спектра алгебраического расширения алгебры непрерывных функций

Б. Т. Батикян
Институт математики НАН Армении
bag@instmath.sci.am

Пусть X – локально компактное топологическое пространство, и A – алгебра непрерывных комплексных функций на X. Предполагается, что A содержит единицу, а ее спектр (пространство характеров) совпадает с X. Тогда спектр алгебры $A[t]$ всех полиномов над A отождествляется с $X \times \mathbb{C}$, а каждый полином $r = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ – с непрерывной функцией $\widehat{r}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\lambda^k$ – его преобразованием Гельфанда. Пусть $p = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_0$ – некоторый полином над A степени $n > 1$, первые n коэффициентов которого не имеют общих нулей. Положим $B = A[t]/(p)$, где

(p) – главный идеал в $A[t]$, порожденный p. В наших условиях алгебра B является расширением A, спектр Y алгебры B совпадает с множеством нулей функции $\widehat{p}(x, \lambda)$, а отображение $\pi : Y \to X$, двойственное к вложению A в B, является конечнолистным и, вообще говоря, разветвленным накрытием. Напомним, что точка $y \in Y$ – точка ветвления, если нет такой окрестности V этой точки, для которой $\pi|V$ инъективно.

Изучение подобных расширений и, соответственно, накрытий берет начало с работ [1], [2], [3] (см. также обзор [4]). Здесь, как и в последующих исследованиях, предполагалось, что A – банахова алгебра, а полином p – унитарен (т. е. $c_n = 1$). В унитарном случае B есть целое расширение исходной алгебры. Но если старший коэффициент c_n не обратим в A, то коранг A-модуля B равен n, а его ранг бесконечен. Таким образом, в не унитарном случае B – алгебраическое, но не целое расширение A.

В докладе приводится алгебраическое описание точек ветвления, определяется и изучается A-индекс ветвления накрытия π. Зафиксируем произвольную точку $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ из Y. Функцию f назовем A-голоморфной в x_0, если найдется такая компактная окрестность U точки x_0, что $f|U$ принадлежит банаховой равномерной алгебре $\overline{A|U}$. Пусть $\mathbf{A}$ – росток всех A-голоморфных в x_0 функций, $\mathbf{p}$ – образ полинома p в $\mathbf{A}[t]$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}[t]/(\mathbf{p})$ – алгебраическое расширение $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ – прямое слагаемое $\mathbf{B}$, отвечающее точке y_0, и $\widehat{\mathbf{D}}$ – алгебра ростков в y_0 (как точки из Y) непрерывных функций вида $\sum\limits_{k=0}^{m} f_k \lambda^k$, где f_k – A-голоморфны в точке x_0. Обозначим через $\mathbf{N}$ прообраз в $\mathbf{A}[t]$ нулевого ростка из $\widehat{\mathbf{D}}$ и положим $i_A(y_0) = \min\{\deg \mathbf{q} : \mathbf{q} \in \mathbf{N}, \mathbf{q} \text{ – унитарен}\}$.

Теорема 1. *Если $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ принадлежит Y, то*

(i) $\sigma(y_0) \le i_A(y_0) \le \nu(y_0)$, где $\sigma(y_0)$ – топологический индекс ветвления накрытия π в y_0, а $\nu(y_0)$ – кратность корня λ_0 полинома $c_n(x_0)t^n + c_{n-1}(x_0)t^{n-1} + \ldots + c_0(x_0)$;

(ii) y_0 есть точка ветвления для π в том и только в том случае, когда $i_A(y_0) > 1$.

Зависящее от A число $i_A(y_0)$ естественно назвать A-индексом ветвления точки y_0. Топологический индекс ветвления $\sigma(y_0)$, вообще говоря, меньше $i_A(y_0)$ (даже в случае $A = C(X)$). Вместе с тем для унитарного и неприводимого полинома над равномерной максимальной алгеброй A имеем $\sigma(y) = i_A(y) = \nu(y)$ для всех «внутренних» точек из Y.

Точки ветвления характеризуются также точечными дифференцированиями на алгебраическом расширении. Пусть кратность $\nu(y_0)$ больше единицы. Тогда для $1 \leq k \leq \nu(y_0) - 1$ на алгебрах B и $\mathbf{B}$ существует нетривиальное точечное дифференцирование $d^{(k)}$ порядка k, отвечающее точке y_0. Функционал $d^{(k)}$ называется локальным дифференцированием на B, если его ядро содержит все элементы, преобразование Гельфанда которых равно нулю в окрестности y_0 .

Теорема 2. *Для того чтобы y_0 являлась точкой ветвления накрытия π необходимо и достаточно, чтобы дифференцирование $d^{(1)}$ на B было локальным.*

Функционал $d^{(k)}$ называется локальным дифференцированием на $\mathbf{B}$, если его ядро содержит образ в $\mathbf{B}$ идеала $\mathbf{N}$.

Теорема 3. *Для того чтобы $i_A(y_0) = s$ необходимо и достаточно, чтобы дифференцирование $d^{(k)}$ на $\mathbf{B}$ при $k < s$ было локальным, а при $k \geq s$ – нелокальным.*

Литература

[1] Arens R., Hoffman K. "Algebraic extensions of normed algebras Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. P. 203-210.

[2] Lindberg J.A. "Factorization of polynomials over Banach algebras Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 112. P. 358-368.

[3] Lindberg J.A. "Algebraic extensions of commutative Banach algebras Pacif. J. Math. 1964. V. 14. P. 559-583.

[4] Dawson T.W. "A survey of algebraic extensions of commutative, unital normed algebras Contemp. Math. 2003. V. 328. P. 157-170.

О гипотезе Гончара

В. И. Буслаев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
buslaev@mi.ras.ru

Доклад будет посвящен обсуждению гипотезы Гончара о возможности распространения теоремы Фабри "об отношении"на случай строк таблицы классических аппроксимаций Паде и их обобщений.

О нелинейных уравнениях p-адических открытых и замкнутых струн

В. С. Владимиров
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
vladimirov@mi.ras.ru

Литература

[1] Владимиров В.С. Об уравнении p-адичческой открытой струны для скалярного поля тахионов. // Известия РАН, Серия матем., 2005, Т. 69, №3, с. 55–80.

[2] Владимиров В.С. О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн. // ТМФ, 2006, Т. 149, №3, с. 354–367.

Гиперболические уравнения на не глобально гиперболических многообразиях

И. В. Волович

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

volovich@mi.ras.ru

Теория задачи Коши для гиперболических уравнений на глобально гиперболических многообразиях была исследована в работах Адамара, Петровского, Лере и других авторов, см. [1]- [2]. Ориентируемое по времени пространство-время (т.е. пара (M, g), где M – гладкое многообразие, g – лоренцева метрика) называется *глобально гиперболическим*, если M диффеоморфно $\mathbb{R}^1 \times \Sigma$, где Σ есть поверхность Коши. Это определение эквивалентно определению глобальной гиперболичности Лере [2].

Гиперболические уравнения на *не* глобально гиперболических многообразиях изучены значительно меньше, хотя многочисленные примеры таких многообразий представляются известными решениями уравнений Эйнштейна для гравитационного поля, такими как решения Геделя, Керра, Готта и другие, см. [3].

В данной работе рассматриваются решения задачи Коши для гиперболических уравнений на не глобально гиперболических многообразиях, содержащих замкнутые времени-подобные кривые ("машины времени"). Доказано, что для волнового уравнения на таких многообразиях специального вида, содержащих конические точки, решение задачи Коши существует, оно разрывно и в определенном смысле единственно для произвольных начальных данных, заданных на гиперповерхности в момент времени, предшествующий образованию замкнутых времени-подобных кривых. Если же гиперповерхность начальных данных пересекает область, содержащую замкнутые времени-подобные кривые, то решение задачи Коши существует только для начальных данных, удовлетворяющих определенному условию самосогласованности.

На полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\}$ рассмотрим два вертикальных интервала γ_1 и γ_2 длины $l > 0$:

$$\gamma_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 | x = a_1,\ b_1 < t < b_1 + l\},$$

$$\gamma_2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 | x = a_2,\ b_2 < t < b_2 + l\}$$

Предположим, что

$$a_2 > a_1,\ \ b_2 > b_1 + l + a_2 - a_1.$$

Пусть $\overline{\gamma}_i$ – замыкание интервала γ_i, $i = 1, 2$. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в открытом подмножестве области $\mathbb{R}_+^2 \backslash \{\overline{\gamma}_1 \cup \overline{\gamma}_2\}$ (исключены характеристические прямые, выходящие из концов отрезков $\overline{\gamma}_i$) для функции $u = u(t, x)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & (1)\\ u(t,x)|_{t=0} &= u_0(x), \quad \partial_t u(t,x)|_{t=0} = u_1(x). & (2)\end{aligned}$$

Здесь и u_0, u_1 - гладкие функции.

Предположим, что функция $u(t, x)$ и ее первые производные по t и x допускают непрерывное продолжение на интервалы γ_1 и γ_2 при стремлении (t, x) к γ_1 и γ_2 справа и слева, и наложим следующие *условия сшивки*:

$$\begin{aligned} u(t,x)|_{x=a_1-0} &= u(t+b_2-b_1,x)|_{x=a_2+0}, & (3)\\ \partial_x u(t,x)|_{x=a_1-0} &= \partial_x u(t+b_2-b_1,x)|_{x=a_2+0}, & (4)\\ u(t,x)|_{x=a_1+0} &= u(t+b_2-b_1,x)|_{x=a_2-0}, & (5)\\ \partial_x u(t,x)|_{x=a_1+0} &= \partial_x u(t+b_2-b_1,x)|_{x=a_2-0}, & (6)\end{aligned}$$

где $b_1 < t < b_1 + l$.

Теорема *Решение задачи* (1), (2), (3) – (6) *существует и, в предположении минимальной разрывности, единственно.*

Мотивировка настоящей работы связана с рассмотрением возможности рождения конфигураций пространства-времени с нетривиальной топологией (wormholes) при столкновении частиц высоких энергий [3].

Работа выполнена совместно с И.Я. Арефьевой и Т. Ишиватари.

Литература

[1] В.С. Владимиров, Уравнения математической физики, М.: Наука, 1967.

[2] Ж. Лере, Гиперболические дифференциальные уравнения, М.: Наука, 1984.

[3] I.Ya. Aref'eva, I.V. Volovich, *Time Machine at the LHC*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 5(2008)641-651; http://arxiv.org/abs/0710.2696.

Обратные задачи в теории аппроксимаций Паде

А. А. Гончар

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

gonchar@mi.ras.ru

Обратные задачи (теоремы, гипотезы и т.п.) в теории аппроксимаций Паде - это утверждения, в которых на основе исходных данных, относящихся к предельному поведению полюсов той или иной последовательности аппроксимаций Паде заданной функции (степенного ряда), делается вывод об области сходимости соответствующих аппроксимаций, аналитическом продолжении функции, расположении и характере ее особых точек. В докладе будет дан обзор результатов и нерешенных задач в этом направлении.

О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка

Г. А. Григорян

Институт математики НАН Армении

mathphys2@instmath.sci.am

Пусть $p_j(t)$, $q_j(t)$ $(j = 1, 2)-$ непрерывные на $[t_0; \tau_0)$ функции. Рассмотрим на $[t_0; \tau_0)$ уравнения

$$(p_j(t)\phi^{'}(t))^{'} + q_j(t)\phi(t) = 0, \quad j = 1, 2 \tag{1}$$

Будем предполагать, что $p_j(t) > 0, t \in [t_0; \tau_0), j = 1, 2$. Наряду с уравнениями (1) рассмотрим дифференциальные неравенства

$$\eta^{'}(t) + \frac{1}{p_j(t)}\eta^2(t) + q_j(t) \geq 0, \;\; t \in [t_0; \tau_0), \;\; j = 1, 2. \tag{2}$$

Показывается, что для любого $\eta_{(0)} \geq 0$ (2) имеет на $[t_0; \tau_0)$ решение $\eta_j(t)$ с $\eta_j(t_0) = \eta_{(0)}$.

Пусть $\phi_j(t)-$ решение уравнения (1), $j = 1, 2$, и пусть $t_1 < ... < t_n$ $(n \geq 1)$ все нули функции $\phi_2(t)$ на $(t_0; t^0]$, где $t^0 \in (t_0; \tau_0)$.

Определение. Тройку (ϕ_1, p_1, q_1) будем называть мажорантой для тройки (ϕ_1, p_1, q_1) на $[t_0; t^0]$, если выполняются условия:

1)$p_1(t_0)\frac{\phi_1^{'}(t_0)}{\phi_1(t_0)} \leq p_1(t_0)\frac{\phi_2^{'}(t_0)}{\phi_2(t_0)}$. Выражение в левой (правой) части неравенства считается равным $+\infty$, если $\phi_1(t_0) = 0$ (соответственно если $\phi_2(t_0) = 0$. В частности оно выполняется если $\phi_2(t_0) = 0$);

2) $p_1(t) \leq p_2(t), \;\; t \in [t_0; t^0]$;

3) существуют $\xi_k \in [t_k; t_{k+1})$ $(k = \overline{0, n-1})$ такие, что :

3.1)$q_1(t) \geq q_2(t), \;\; t \in [t_k; \xi_k], \;\; k = \overline{0, n-1}$;

3.2) для решений $\eta_{jk}(t)$ на $[\xi_k; t_{k+1}]$ соответственно неравенств (2) $(j = 1, 2)$ таких, что

$$\eta_{jk} > p_2(t_0)\frac{\phi_2^{'}(t_0)}{\phi_2(t_0)}$$

выполняются неравенства

$$\int_{\xi_k}^{t} \exp\left\{\int_{\xi_k}^{\tau} \frac{\eta_{1,k}(s) + \eta_{2,k}(s)}{p_2(s)} ds\right\} [q_1(\tau - q_2(\tau)] d\tau \geq 0, \;\; t \in [\xi_k; t_{k+1}],$$

$k = \overline{0, n-1}$.

Если в 1) имеет место строгое неравенство или выполняется хотя бы одно из условий

$1^{'}$)$p_1(t^{'} < p_2(t^{'}), q_1(t^{'}) \neq 0$ для некоторого $t^{'} \in [t_0; t^0]$;

$2^{'}$)$q_1(t^{'}) > q_2(t^{'})$ для некоторого $t^{'} \in \cup_{k=0}^{n-1}[t_k; \xi_k]$;

$$3') \qquad \int_{\xi_k}^{t_{k+1}} \exp\left\{\int_{\xi_k}^{\tau} \frac{\eta_{1,k}(s)+\eta_{2,k}(s)}{p_2(s)}ds\right\}[q_1(\tau - q_2(\tau)]d\tau > 0$$

для некоторого $k=\overline{0,n-1}$, то тройку (ϕ_1,p_1,q_1) будем называть строгой мажорантой для (ϕ_2,p_2,q_2) на $[t_0;t^0]$.

Отметим, что в условиях первой части первой теоремы сравнения Штурма (см. [*], стр. 394), (ϕ_1,p_1,q_1) является мажорантой для (ϕ_2,p_2,q_2), а в условиях второй (последней) части указанной теоремы является строгой мажорантой для (ϕ_2,p_2,q_2).

Теорема. Пусть $\phi_2(t)$-решение уравнения (1) при $j=2$ и $t_1<...<t_n$ $(n\geq 1)$ все его нули на $(t_0;t^0]$ $(t^0\in(t_0;\tau_0))$, а $\phi_1(t)$ – решение уравнения (1) при $j=1$. Тогда если (ϕ_1,p_1,q_1) мажоранта для (ϕ_2,p_2,q_2) на $[t_0;t^0]$, то для каждого $k=\overline{0,n-1}$ $\phi_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль на $(t_k;t_{k+1}]$. Кроме того, если (ϕ_1,p_1,q_1) строгая мажоранта для (ϕ_2,p_2,q_2) на $[t_0;t_n]$, то $\phi_1(t)$ имеет по меньшей мере n нулей на $(t_0;t_n)$.

Пример. Пусть $p_1(t)=p_2(t)\equiv 1$, $q_1(t)=1+\sin\lambda t$, $\lambda>0$, $t\in[0;\frac{\pi}{2})$, $\phi_2(t)=\cos(t+\epsilon)$ $(0<\epsilon<\frac{\pi}{2})$ – решение уравнения (1) при $j=2$, имеет на $[0;\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}]$ всего лишь один нуль: $t_1=\frac{\pi}{2}-\epsilon$. Очевидно, что при $0<\lambda\leq\leq\frac{2\pi}{2-2\epsilon}$ уравнение (1) при $j=1$ является строгой мажорантой Штурма (определение см. [*], стр. 394) для (1) при j=2. Поэтому, в силу первой теоремы сравнения Штурма при $0<\lambda\leq\frac{2\pi}{2-2\epsilon}$ любое решение $\phi_2(t)$ уравнения (1) при $j=1$ с $\frac{\phi_1'(0)}{\phi_1(0)}\leq -tg\epsilon$ имеет на $(0;\frac{\pi}{2}-\epsilon)$ по крайней мере один нуль. При $\lambda>\frac{2\pi}{2-2\epsilon}$ теорема Штурма не применима. Однако, поскольку $\eta_{1,k}(t)=\eta_{2,k}(t)\equiv 0$ $(k=0)$ является решением неравенств (2) $(j=1,2)$, то легко убедиться, что для любого $\lambda>0$ и для любого решения $\phi_1(t)$ уравнения (1) при $j=1$ с $\frac{\phi_1'(0)}{\phi_1(0)}\leq -tg\epsilon$ тройка (ϕ_1,p_1,q_1) является строгой мажорантой для (ϕ_2,p_2,q_2) на $[0;\frac{\pi}{2}-\epsilon]$. Поэтому, при любом $\lambda>0$ $\phi_1(t)$ имеет на $(0;\frac{\pi}{2}-\epsilon)$. по крайней мере один нуль.

Литература

* Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, "Мир 1970.

Поведение вблизи границы дифференциальных характеристик решений эллиптического уравнения второго порядка

А. К. Гущин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

akg@mi.ras.ru

Известная теорема Де Джорджи и Нэша, [1], [2], утверждает, что решения равномерно эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

с измеримыми и ограниченными коэффициентами $a_{i,j}$, по определению принадлежащее только пространству Соболева $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, непрерывны по Гёльдеру внутри области Q с некоторым, зависящим лишь от размерности пространства n и постоянной эллиптичности показателем α. В работах автора [3] и [4] были установлены свойства решений уравнения (1), занимающие "промежуточное"положение между "интегральным"свойством его принадлежности пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и "точечным"свойством его внутренней непрерывности по Гёльдеру. Было показано, что среди этих "промежуточных"свойств существуют и такие, которые не вытекают из "крайних": из принадлежности пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и гёльдеровой непрерывности внутри области Q. Установленные свойства объединяются с единой точки зрения — все они являются немедленным следствием принадлежности решений специальному функциональному пространству. Описание пространства даётся в терминах ограниченности множества интегралов от функции $(u(x) - u(y))^2$ по борелевским мерам (неотрицательным, не обязательно конечным) на множестве $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}_{2n} : \ |y - x| \neq 0\}$, носители которых лежит в $\{(x, y) \in D : x \in \bar{Q}', y \in \bar{Q}'\}, Q' \subset\subset Q$. При этом существенным является выбор класса допустимых мер: чем он шире, чем больший рост допускается при приближении к "диагонали"$\{x = y\}$, тем сильнее получаемые свойства гладкости.

Целью настоящего сообщения является получение аналогичных глобальных свойств решения, характеризующих поведение вблизи границы его дифференциальных характеристик. Результаты частично опубликованы в работе [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-01-00144) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ - 3224 - 2008.1).

Литература

[1] *DeGiorgi E.*// Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1957. V. 3. P. 25 – 43.

[2] *Nash J.*// Amer. J. Math. 1958. V.80. P. 931–954.

[3] *Гущин А.К.*// Сибирский математический журнал. 2005. т. 46. N 5. Стр. 1036 – 1052.

[4] *Гущин А.К.*// ДАН. 2005. т. 404. N 1. Стр. 14 – 17.

[5] *Гущин А.К.*// ДАН. 2007. т. 415. N 1. Стр. 1 – 4.

Ортогональное представление субгармонических в круге функций

А. М. Джрбашян

Институт математики НАН Армении

armen_jerbashian@yahoo.com

Вводятся произвольно широкие классы N^2_ω функций субгармонических в единичном круге $|z|<1$ комплексной плоскости - как множества тех функций $u(z)$, которые принадлежат лебеговым пространствам L^2_ω, т.е. удовлетворяют условию роста

$$\|u\|^2_{L^2_\omega} = \iint_{|z|<1} \big[u(z)\big]^2 d\mu_\omega(z) < +\infty,$$

где $d\mu_\omega(re^{i\vartheta}) = -d\vartheta d\omega(r^2)$, а $\omega(x)$ предполагается вещественной, непрерывно дифференцируемой, строго убывающей функцией на $[0,1)$, такой, что $\omega(0)=1$, $\omega(1)=\omega(1-0)=0$ и $|\omega'(x)|$ строго убывает на $[0,1)$.

Доказано, что N^2_ω совпадает с классом функций допускающих разложение в сумму некоторого интеграла типа Пуассона и ω-потенциала типа Грина с мерой Рисса определенного типа, и эти слагаемые ортогональны в L^2_ω. Установленное разложение в частности переходит в универсальную факторизацию для всех функций голоморфных в единичном круге.

Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений

А. В. Домрин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

domrin@mi.ras.ru

Показано, что любое локальное (по x и t) голоморфное решение $u(x,t)$ любого из широкого класса солитонных уравнений (включающего уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, их иерархии и модификации) допускает при каждом фиксированном t аналитическое продолжение до функции, мероморфной на всей плоскости комплексного переменного x. В доказательстве используется локальный (не зависящий от каких-либо граничных условий) вариант метода обратной задачи рассеяния.

Многомерные тауберовы теоремы в некоторых моделях математической физики

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

drozzin@mi.ras.ru, bzavial@mi.ras.ru

Теоремами тауберова типа называют теоремы, связывающие асимптотическое поведение функции (вообще говоря, обобщенной) на бесконечности (или в нуле) с асимптотическим поведением ее преобразования Лапласа (Фурье или других интегральных преобразований) в окрестности нуля (или бесконечности). Теоремы, обратные к тауберовым, называют абелевыми. Тауберова теория интенсивно развивалась в первой половине нашего столетия и относилась в основном к функциям или мерам одной независимой переменной. Ее результаты подытожены в работах Г. Харди Н. Винера, Я. Коревара. Однако, потребности современной теоретической и математической физики поставили задачу распространения классической тауберовой теории для мер на более общие обьекты – обобщенные функции как одной, так и многих переменных. Эта проблематика была инициирована фундаментальной работой Н.Н. Боголюбова, В.С. Владимирова, А.Н. Тавхелидзе в связи с теоретическим обоснованием автомодельного поведения при высоких энергиях и больших переданных импульсах величин квантовой теории поля "Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля.II"(Теор. и мат. физика. 1972. Т.12, No 3. С. 305–330). В 1976 году В.С. Владимиров распространил известную тауберову теорему Харди – Литтлвуда на многомерный случай. После этих работ в отделе математической физики развернулись систематические исследования по тауберовой теории обобщенных функций как в чисто математическом плане, так и в плане их применения в теоретической и математической физике.

В докладе будут рассмотрены некоторые тауберовы теоремы для обобщенных функций и приведены их применения в моделях математической физики. В частности, будет оценено поведение (по времени) решений задачи Коши для уравнения Шредингера в нормах различных банаховых пространств.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07–01–00144, и гранта президента РФ НШ–3224.2008.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б.И. "Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций М: Наука, 1986.
2. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах // Матем. сб., 2003. Т. 194, No 11. С. 17–64.
3. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Об одной многомерной теореме тауберова типа для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах // Доклады РАН, т. 391, No 2, 2003, 158–161.

О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

В. Ж. Думанян

Ереванский государственный университет

duman@ysu.am

Работа посвящена изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей ∂Q для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} (cu)_{x_i} + du = f(x) - div\, F(x), x \in Q, \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \tag{2}$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$; $f(x)$ и $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma_1 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = (\xi, A\xi) \leqslant \gamma_2 |\xi|^2,$$

для всех $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R_n$ и $x \in Q$ с положительными постоянными γ_1 и γ_2, а коэффициенты $B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $c(x)$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Исследуется $(n-1)$-мерная непрерывность (принадлежность пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$) решения рассматриваемой задачи. Для уравнения без младших членов ($b_i = 0$, $c = 0$, $d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ ($F = 0$) свойство $(n-1)$-мерной непрерывности решения задачи Дирихле было установлено в работе А. К. Гущина. Обобщение этого результата на более широкий класс правых частей было получено в работе А. К. Гущина и В. П. Михайлова.

В настоящей работе получены условия на коэффициенты при младших членах уравнения при которых решение из $W^1_{2,loc}$ задачи Дирихле (1), (2) является $(n-1)$-мерно непрерывной функцией, т.е. принадлежит пространству А. К. Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$.

Уравнение Винера-Хопфа с отрицательным ядром

Б. Н. Енгибарян

Институт математики НАН Армении

bagrat@eif.am

Рассматривается интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt\,, \tag{1}$$

где $\lambda < 0$, $K(\pm x) = \int_0^\infty e^{-sx} d\sigma_\pm(s)\,,\ \ x > 0$. Здесь $\sigma_\pm$ неубывающие функции такие, что $\int_{-\infty}^\infty K(x)dx = 1$.

Уравнение (1) представляет интерес в теории фильтрации случайных процессов и др.

Пусть E^+ одно из банаховых пространств $L_p(0;\infty)$, $1 \le p \le \infty$; $C_0[0;\infty)$; $C_M[0;\infty)$. Показывается, что (1) однозначно разрешимо в E^+ при произвольном $g \in E^+$. Уравнению (1) соответствует следующее уравнение Амбарцумяна:

$$\varphi_\pm(s) = 1 + \lambda \varphi_\pm(s) \int_a^b \frac{\varphi_\mp(p)}{s+p} d\sigma_\mp(p), \tag{2}$$

через решение (φ_+, φ_-) которого строится факторизация Винера-Хопфа уравнения (1). Предлагается конструктивный способ решения (2), основанный на специальный итерационный процесс. Доказывается:

Теорема 1. *При произвольном $\lambda < 0$ УА (2) обладает решением (φ_+, φ_-), причем $\varphi_\pm \in C^\infty[a;b]$, $0 \le \varphi_\pm \le 1$.*

Развивается способ численно - аналитического решения УА (2) и соответствующего уравнения (1).

Дифференциальные уравнения с производной по мере

Н. Б. Енгибарян

Институт математики НАН Армении

yengib@instmath.sci.am

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с производной по мере $d\mu$, где μ неубывающая непрерывная функция на $[a;b] \subset (-\infty;\infty)$,

$$\frac{dz(t)}{d\mu(t)} = G(t)z + \eta(t). \tag{1}$$

с начальным условием

$$Z(a) = z_0, \quad z_0 \in R^n\,. \tag{2}$$

Здесь $\eta \in L_1^N(\mu)$ заданный вектор столбец; $z \in C_A^n(\mu)$ искомый вектор столбец, а $G \in L_1^{n\times n}(d\mu)$ – матрица размера $n \times n$. Через $C_A(\mu)$ обозначено банахово пространство функций, абсолютно непрерывных относительно $d\mu$.

Лемма 1. *Задача Коши* (1),(2) *имеет единственное решение* $z \in C_A^n(\mu)$.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу относительно $X, Y \in C_A^{n\times n}(\mu, [a;r])$:

$$\frac{dX(t)}{d\mu(t)} = A(t)X + B(t)Y, \qquad \frac{dY(t)}{d\mu(t)} = C(t)X + D(t)Y, \tag{3}$$

$$X(a) = O, \quad Y(r) = I_n. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть задача* (3),(4) *имеет единственное решение* $X = X_r$, $Y = Y_r$ *при произвольном* $r \in [a; l]$. *Тогда*

$$det\, Y_l(t) \neq 0, \;\; t \in [a; l]. \tag{5}$$

Сопоставим задаче (3),(4) следующую задачу Коши для матричного дифференциального уравнения типа Риккати:

$$\frac{dR(t)}{d\mu(t)} = AR + B - R(CR + D), \quad R(a) = O. \tag{6}$$

Роль уравнения Риккати в вопросе решения краевых задач для линейных ДУ хорошо известна (см. [1],[2]).

Теорема 3. *Пусть задача* (3),(4) *разрешима при произвольном* $r \in [a; b]$. *Тогда существует единственное решение* $R \in C_A^{n\times n}(\mu, [a; b])$ *задачи* (6), *причем* $X(t) = R(t)Y(t)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу, где $\varepsilon^{\pm} \in L_1^n(\mu)$; $h, \gamma \in R^n$

$$\frac{dx(t)}{d\mu(t)} = A(t)x + B(t)y + \varepsilon^{+}(x), \quad \frac{dy(t)}{d\mu(t)} = C(t)x + D(t)y + \varepsilon^{-}(x), \tag{7}$$

$$x(a) = h, \;\; y(r) = \gamma. \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть существует решение* $R \in C_A^{n\times n}(\mu, [a; b])$ *задачи Коши* (6). *Тогда для произвольного* $r \in [a; b]$ *краевая задача* (7),(8) *имеет единственное решение.*

При известном R задача (7),(8) сводится к двум n – мерным задачам Коши.

Пусть K – вполне непрерывный оператор, действующий в $L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$:

$$(Kf)(t) = \int\limits_a^b k(t, s) f(s) \mu(ds), \;\; s \in (a; b). \tag{9}$$

Рассмотрим факторизацию

$$I - K = (I - U^{+})(I - U^{-}), \tag{10}$$

где

$$(U^+f)(t) = \int\limits_a^t u^+(t,s)f(s)\mu(ds), \;\; (U^-f)(t) = \int\limits_t^b u^-(t,s)f(s)\mu(ds),$$

$s \in (a;b)$. Аналогично подходу [3] к вольтерровой факторизации в гильбертовом пространстве, задачу (10) мы сводим к двум частным задачам: случай оператора K с малой нормой и случай конечномерного оператора K. Представим K в виде $K = K_1 + K_2$, где $\|K_1\| < \dfrac{1}{4}$, а K_2 – конечномерный оператор. С использованием метода нелинейных уравнений факторизации (см. [4]) строится вольтеррова факторизация $I - K_1 = (I - U_1^+)(I - U_1^-)$. Задача сводится к построению факторизации для $I - W$, где $W = (I - U_1^+)^{-1}K_2(I - U_1^-)^{-1}$ – конечномерный оператор. С использованием теоремы 4 доказывается:

Теорема 5. *Для того чтобы существовала вольтеррова факторизация* (10) *необходимо и достаточно, чтобы оператор* $I - P_rKP_r$ *был обратим в* $L_p(\mu)$ *при произвольном* $r \in [a;b]$, *где* P_r *действующий в* $L_p(\mu)$ *проектор умножения функции на характеристическую функцию интервала* $[a;r]$.

К решению задаче Коши (6) для уравнения Риккати сводится нелинейное уравнение факторизации также в случае так называемого "многопарного" ядра вида

$$w(t,s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^+(t)\beta_k^+(s), \;\; s<t; \;\; w(t,s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^-(t)\beta_k^-(s), \;\; s>t;$$

$$\alpha_k^\pm \in L_p(\mu), \;\; \beta_k^\pm \in L_q(\mu), \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Литература

[1] Reid W. T., Riccati differential equations, NY-L. 1972.

[2] В. С. Владимиров, Приближенное решение краевой задачи, Прикл. Мат. и Мех. 19(1958), 315.

[3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения,Наука, М.: 1967.

[4] Н. Б. Енгибарян, Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов, Матем. Сборник, Т.191, 12, 2000, С.61-76.

О цепях Маркова со счетным множеством состояний

Н. Б. Енгибарян

Институт математики НАН Армении

yengib@instmath.sci.am

Пусть G_{sub} класс субстохастических матриц $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, где $p_{ik} \geqslant 0$, $\lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P_{ij} \leqslant 1$, $i, k = 1, 2 \cdots$. Обозначим через $G_{st} \subset G_{sub}$ класс стохастических матриц. Пусть Q_r, где $r \geqslant 1$, следующий проектор, действующий в $G : (Q_r A)_{ij} = (A)_{ij}$, $i, j \geqslant r$ $(Q_r A)_{ij} = (A)_{ij} = 0$ если $i < r$ или $j < r$. Рассмотрим цепь Маркова ξ_p со счетным множеством состояний E_1, E_2, $\cdots$ и матрицей переходных вероятностей (см. [1]). Решение

$$\theta \prec \eta = (\eta_1\,, \eta_2\,, \cdots) \in l_1$$

уравнения

$$\eta = \eta P \tag{1}$$

с нормировкой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} = 1$ определяет инвариантное распределение вероятностей цепи ξ_p. Если цепь неприводимая и непериодичная, то $\eta > \theta$ и цепь эргодична.

Матрицу $I - P$, $P \in G_{sub}$, назовем асимптотически нормально обратимой, если при некотором $r \geqslant 1$ $\exists (I - P_r)^{-1} = I + H_r$, где $H_r \in G$, $Q_r H_r = H_r$.

В [2] доказано, что при произвольном $P \in G_{sub}$ существует факторизация

$$I - P = (I - C)(I - B), \tag{2}$$

где $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ треугольные матрицы: $b_{ij} = 0,\ i \leqslant j$; $c_{ij} = 0,\ i > j$. Матрица B – строго субстохастическая, имеют место неравенства $c_{ij} \leqslant \sum\limits_{k=j}^{\infty} p_{ik}$.

Из результатов [2] непосредственно следует следующая сравнительно простая эргодическая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрица $P \in G_{st},\ \ P > O$, (поэлементно) и матрица $I - P$ асимптотически нормально обратима. Тогда цепь ξ_p эргодична.*

С использованием некоторых новых свойств факторизации (2) доказывается:

Теорема 2. *Пусть $P \in G_{st}$ и существуют $\varepsilon > 0$, $r > 1$ такие, что $\sum\limits_{j=i}^{\infty} p_{ij} j^2 < +\infty$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}(j - i) \leqslant -\varepsilon$ при $i \geqslant r$. Тогда цепь ξ_p обладает инвариантным распределением вероятностей. Если цепь неприводимая и непериодическая, то она эргодична.*

Условия теорем 1,2 имеют простой вероятностный смысл. Приведем один пример. Пусть $P \in G_{st}$ – матрица с элементами

$$p_{ij} = a_{i-j} + a_{i+j},\ \ i, j \geqslant 1, \tag{3}$$

где $a_i > 0,\ \ -\infty < i < +\infty$; $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 1$.

Цепь Маркова с матрицей (3) описывается случайное блуждание на решетке $E_1,\ E_2, \cdots$ с границей E_0, отражающей по специальному закону. Пусть выполнены условия $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} k^2 a_k < +\infty$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} k a_k < 0$. Тогда матрица (3) удовлетворяет условиям теоремы 2 и цепь ξ_p эргодична. Заметим, что в рассматриваемом примере $I - P$ не является асимптотически нормально обратимым.

В теории марковских цепей, марковских и полумарковских процессов представляет интерес неоднородное уравнение

$$x = h + xP\,;\ \ 0 \leqslant h \in l_1 \tag{4}$$

Доказывается, что при произвольном $P \in G_{sub}$ хотя бы одно из уравнений (2) и (4) обладает положительным решением. Найдено одно достаточное условие разрешимости (4) при $P \in G_{st},\ P > 0$. Этот факт не имеет конечномерного аналога.

Отмеченные выше результаты привели к новым теоремам по существованию и асимптотическим свойствам решения уравнения марковского восстановления со вложенной цепью ξ_p.

Литература

[1] В. Феллер Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М.:МИР, Т.1, 1984, 528 с.

[2] N. B. Yengibarian, Factorization of Markov Chains. //J. of Theor. Probability, 2004. Vol.17.2, pp. 459-481.

Симметрии и законы сохранения эволюционных систем на решетке

В. В. Жаринов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

zharinov@mi.ras.ru

Рассматриваются эволюционные системы на многомерной решетке, когда пространственные переменные принимают целочисленные значения, а временная переменная непрерывная. В рамках алгебро-геометрического подхода к дифференциально-разностным уравнениям изучены симметрии и законы сохранения таких систем. Дано описание законов сохранения в терминах их характеристик.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 07-01-00144-а и НШ 3224.2008.1

Асимптотически однородные обобщенные функции

Б. И. Завьялов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

bzavial@mi.ras.ru

Пусть $a \in R_{+}^{n}$ т.е. $a = (a_1, \ldots, a_n), a_i > 0, i = 1, \ldots n$. Для любого $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n$ и $k > 0$ положим

$$U_k^a t = (k^{a_1} t_1, \ldots, k^{a_n} t_n),$$

$$U_k^{-a} t = (\frac{t_1}{k^{a_1}}, \ldots, \frac{t_n}{k^{a_n}}).$$

Пусть $f(t) \in S\,(R^n)$. Мы говорим, что $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно некоторой положительной и непрерывной при $k > 0$ функции $\rho\,(k)$ и вектора $a \in R_{+}^{n}$, если существует предел

$$\frac{1}{\rho\,(k)} f(U_k^a t) \rightarrow f_0\,(t)\,, k \rightarrow +\infty \ in\ S^{'}\,(R^n)\,.$$

Аналогично,мы говорим, что $f(t)$ асимптотически однородна в нуле относительно некоторой положительной и непрерывной при $k > 0$ функции $\rho\,(k)$ и вектора $a \in R_{+}^{n}$, если существует предел

$$\frac{1}{\rho\,(k)} f(U_k^{-a} t) \rightarrow f_0\,(t)\,, k \rightarrow +\infty \ in\ S^{'}\,(R^n)\,.$$

При этом будем писать $f(t) \in AO^{a}_{\rho(k)}(S(R^n))$, либо $f(t) \in AO^{-a}_{\rho(k)}(S(R^n))$.

Если $f_0(t) \not\equiv 0$, то $\rho(k)$ необходимо является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. Другими словами для любого $a > 0$ существует предел

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \to C(a), k \to +\infty.$$

В этом случае обязательно $C(a) = a^{\alpha}$. Число α называется порядком автомодельной функции $\rho(k)$.

Наша задача – описать все асимптотически однородные функции. Мы также укажем некоторые их приложения.

Числа Гурвица, пространства модулей и интегрируемые иерархии

М. Э. Казарян

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

kazarian@mccme.ru

Пространства модулей алгебраических кривых являются классическим объектом математических исследований в течение многих десятилетий. Однако именно физикам (Виттену) принадлежит открытие того, что производящий ряд для некоторых чисел пересечений удовлетворяет уравнениям интегрируемой иерархии КдФ. Несмотря на наличие нескольких независимых формальных доказательств гипотезы Виттена, ее утверждение все равно в течение многих лет выглядело загадочным, и имеется даже мнение, что без помощи физиков математики сами к ее формулировке никогда бы не пришли.

В докладе я объясню подход к теории пересечений на пространствах модулей, основанный на ее связи с числами Гурвица, обнаруженной в работе Экедала-Ландо-Шапиро-Вайнштейна. В рамках этого подхода удается не только «доказать», но и «объяснить» естественную причину возникновения интегрируемых иерархий, а также обнаружить много новых явлений в теории пересечений на пространствах модулей.

Кинетическое уравнение Власова и его обобщения

В. В. Козлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

kozlov@pran.ru

Работа посвящена изучению обобщенного кинетического уравнения, описывающего эволюцию плотности вероятностной меры. В общем случае оно является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. С одной стороны, это уравнение включает как частный случай более простое линейное уравнение Лиувилля (которое является основой классической статистической механики) и уравнение самосогласованного поля (кинетическое уравнение Власова), а с другой – к нему сводятся некоторые другие известные уравнения, в частности уравнение вихря для плоских течений идеальной несжимаемой жидкости. Основная цель работы – исследование задачи о слабых пределах решений обобщенного кинетического уравнения при неограниченном возрастании времени. Эта задача имеет существенное значение при переходе от микро- к макроописанию, когда изучается поведение средних (наиболее вероятных) значений динамических величин. Теория слабых пределов решений уравнения Лиувилля тесно связана с идеями и методами эргодической теории. Рассматриваемый случай представляет бóльшие трудности, упирающиеся в нетривиальную проблему существования инвариантных счетно-аддитивных мер динамических систем в бесконечномерных пространствах. Результаты общего характера применяются к изучению континуумов взаимодействующих частиц и статистических свойств плоских течений идеальной жидкости.

Козлов В.В., Обобщенное кинетическое уравнение Власова, Успехи мат. наук, 2008, т.63, вып. 4, с. 93-130

p–Адические параметры в теории сложных иерархических систем

С. В. Козырев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

kozyrev@mi.ras.ru

Обсуждается введение p–адических параметров для описания сложных иерархических систем. Рассматриваются примеры теории спиновых стёкол, теории всплесков (вейвлетов), а также p–адическая параметризация генетического кода.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00727-а и НШ-3224.2008.1

Оценки классов Жеврея данных рассеяния для полиномиальных потенциалов

А. В. Комлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Известно, что необходимым условием разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для эволюционных уравнений, представляющих собой интегрируемые потоки, ассоциированные с заданными матрицами, является принадлежность данных рассеяния потенциала (начального условия) классу Жеврея $1/m$, где m — номер потока в иерархии. Оказывается, что для мономиальных 2×2-потенциалов удается точно вычислить показатель класса Жеврея их данных рассеяния. В данной работе получена верхняя оценка на показатель класса Жеврея данных рассеяния для полиномиальных потенциалов. Она совпадает с нижней оценкой данных рассеяния для мономиальных потенциалов, которая была недавно получена А. В. Доминым в свете решения вопроса о сходимости ряда Концевича-Виттена. Методами данной работы можно также получить эту нижнюю оценку для мономиальных потенциалов и нижнюю оценку для полиномиальных потенциалов специального вида, которая тоже оказывается точной.

О приближении в среднем на комплексной плоскости многочленов с пропусками

В. А. Мартиросян

Ереванский государственный университет

mart@instmath.sci.am

В докладе предполагается изложить новые результаты о возможности приближения многочленами с пропусками. Приближения осуществляются в норме пространства Лебега $L_p, 1 \leq p < \infty$, как на множествах Каратеодори, так и на не-каратеодориевых множествах комплексной плоскости. Получены лакунарные варианты некоторых результатов Фарелла-Маркушевича, С.О. Синаняна, А.Л. Шагиняна, М.М. Джрбашяна и других авторов. Рассматриваются также аналогичные приближения вещественными частями многочленов с пропусками.

[1] Мергелян С.Н. "О полноте систем аналитических функций УМН, 8, No 4, 3 - 63, 1953.

[2] Мельников М.С., Синанян С.О. "Вопросы теории приближения функций одного комплексного переменного В сб.: Современные проблемы математики. Итоги науки и техники, т. 4, Наука, М., 143 - 245, 1975.

[3] Brennan J.E., "Approximation in the mean by polynomials on non-Caratheodory domains Ark. Math., 15, No.1, 117 - 168, 1977.

[4] Brennan J.E., "The Cauchy integral and certain of its applications", Изв. НАН Армении. Математика., 39, No 1, 5 - 48, 2004.

Некоторые следствия модельной системы уравнений Дирака–Максвелла

Н. Г. Марчук
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
nmarchuk@mi.ras.ru

Будут рассмотрены два следствия из предложенной автором модельной системы уравнений Дирака–Максвелла [1]. Во-первых, модельное уравнение Дирака будет записано в виде дивергенции (или в виде близком к дивергентному). Во-вторых, будет представлена калибровочная теория нового типа – с двумя полями Янга–Миллса.

Список литературы

[1] Марчук Н.Г. ТМФ, т.157, №3 (2008).

О существовании граничных значений у полигармонических функций в шаре

В. П. Михайлов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
vpmih@mi.ras.ru

Пусть $u(x), x = (x_1, \dots, x_n), |x| < 1,$ —решение уравнения

$$\Delta^m u = 0, |x| < 1,$$

при некотором $m \geq 1, u(x) = u(r\omega),\ r = |x|,\ \omega = \frac{x}{|x|},\ |\omega| = 1$.

Для того чтобы функция $u(x)$ имела L_2 -предел на границе $\{|x| = 1\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а)

$$\sup_{0<r<1} \|u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} < \infty \qquad \text{(условие Рисса)},$$

б)

$$\sup_{0<r<1} \|\mathbb{P}_N u(r\omega)\|_{L_2(|\omega|=1)} \to 0 \qquad \text{при} N \to \infty,$$

где $\mathbb{P}_N,\ N > 0,$ —проекционный оператор в $L_2(|\omega| = 1)$, определяемый следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{M}_k,\ k$ -ое , $k \geq 0$, собственное пространство оператора Бельтрами-Лапласа, отвечающее собственному значению $\lambda_k = k(k+n-2),\ \dim \mathfrak{M}_k = M(k) = (2k+n-2)\ \frac{(k+n-3)!}{(n-2)!k!}$. Оператор $\mathbb{P}_N,\ N > 0$ —есть оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(|\omega| = 1)$ на его подпространство $\bigcup\limits_{k=N}^{2N} \mathfrak{M}_k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 07-01-00144а и НШ-3224.2008.1

Консервативное матричное уравнение Риккати, возникающее в задачах переноса

М. Г. Мурадян

Институт математики НАН Армении

maxim_muradyan@yahoo.com

В ряде конечномерных модельных задач переноса излучения в неоднородной плоско – параллельной среде, матрица отражения ρ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$-\frac{d\rho}{d\eta}+A\rho+\rho A=L^-(\eta)+L^+(\eta)\rho+\rho L^+(\eta)+\rho L^-(\eta)\rho, \qquad 0\leqslant\eta<\infty. \tag{1}$$

Здесь A — постоянная диагональная матрица с диагональными элементами $a_{ii}>0$, $L^{\pm}=(l_{ij}^{\pm})$ – неотрицательные непрерывные матрицы – функции, связанные с матрицей A условием

$$\sum_{j=1}^{m}(l_{ij}^{+}(\tau)+l_{ij}^{-}(\tau))\leqslant a_i, \qquad i=1,\,2,\cdots,m. \tag{2}$$

Матрица L^- предполагается неразложимой при каждом τ. В случае однородного (т.е. $L^{\pm}$ – постоянные матрицы) полупространства уравнение (1) переходит в алгебраическое уравнение

$$A\rho+\rho A=L^-+L^+\rho+\rho L^++\rho L^-\rho, \tag{3}$$

которое представляет собой аналог известного уравнения Амбарцумяна [1]. Н. Б. Енгибаряном [2] доказано, что уравнение (3) имеет решение $\rho=(\rho_{ij})$, обладающее свойствами

$$\rho_{ij}\geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}\leqslant 1, \qquad i=1,\,2,\,\cdots,m. \tag{4}$$

Получены также оценки (4) для решения уравнения (1), когда его коэффициенты мажорируются коэффициентами уравнения (3). В общем случае (2), нами доказывается существование глобального решения уравнения (1) на всей полуоси, а также оценки (4) для этого решения [3].

Случай, когда для всех i имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{m}(l_{ij}^{+}(\tau)+l_{ij}^{-}(\tau))=a_i, \qquad i=1,\,2,\cdots,m. \tag{5}$$

является консервативным и диссипативным, если хотя бы в одной точке τ_0, при некотором i в (2) имеет место строгое неравенство.

В ряде задач переноса излучения матрицы коэффициенты $L^{\pm}(\tau)$ представляются в виде $L^{\pm}(\tau) = MG^{\pm}(\tau)$, где M – диагональная матрица с положительными диагональными элементами, а $G^{\pm}(\tau)$ симметрические матрицы – функции.

В настоящей работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *В консервативном случае* (5) *уравнение Риккати* (1) *имеет решение на всей полуоси, обладающее свойствами*

$$\rho_{ij}(\tau) > 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij}(\tau) = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \qquad \tau \in [0, +\infty). \tag{6}$$

Теорема 2. *Если на некотором интервале* (a, b) *решение уравнения* (1) *удовлетворяет условиям* (6)*, то на этом интервале выполняются равенства* (5)*.*

Теорема 1 в случае периодических коэффициентов $L^{\pm}(\tau)$ (рассеивающая среда периодическая), ранее была доказана автором в работе [4].

Список литературы

[1] В. А. Амбарцумян Научные труды. Т.1. Ереван, 1961.

[2] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян В сб. Принцип инвариантности и его приложения. Ереван, 1989, с. 326-333.

[3] М. Г. Мурадян В сб. Математический анализ и его приложения. Ереван, 1980, с. 11-25.

[4] М. Г. Мурадян Дифференциальные уравнения, 2004, т. 40 N 8, с. 1050-1058.

Адаптивное ускорение сходимости ряда и интерполяции Фурье

А. Б. Нерсесян

Институт математики НАН Армении

nerses@instmath.sci.am

Известно, что наличие явления Гиббса приводит к медленной сходимости как ряда Фурье, так и соответствующей тригонометрической интерполяции в прямоугольных областях. Именно это обстоятельство не позволяет достаточно эффективно использовать этот аппарат в приложениях.

Идея «преодоления явления Гиббса» была высказана и обоснована академиком А.Крыловым еще в 1905 г. и переоткрыта К.Ланцошем пол-века спустя. Эффективные алгоритмы ускорения сходимости в одномерном случае, не использующие заранее заданной информации о сингулярных точках разлагаемой кусочно-гладкой функции и о ее скачках, были разработаны в конце прошлого века в работах К. Экгофа.

Предлагаемое сообщение содержит результаты, обобщающие и усиливающие последний подход. Приводится краткий обзор результатов одномерного случая, который был исследован в 2004-2006 гг. Основное внимание обращено на теоретическое обоснование методов ускорения сходимости двумерного ряда Фурье и тригонометрической интерполяции на равномерной прямоугольной сетке. Соответствующие алгоритмы хорошо адаптируются к свойствам аппроксимируемых функций. Показано, что используемая схема ускоренной аппроксимации обобщается на определенные спектральные разложения.

В качестве приложения рассмотрены задачи интерполяции и сжатия цифровой информации на модели Image Processing. Сравнительный анализ с соответствующими известными алгоритмами указывает на практическую перспективнисть предлагаемого подхода.

Эффективность разработанных алгоритмов иллюстрируется численными результатами.

Рассеяние вихрей в абелевой модели Хиггса

Р. В. Пальвелев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
palvelev@front.ru

В докладе изучается рассеяние вихрей в абелевой (2+1)-мерной модели Хиггса. Под вихрями подразумеваются решения вихревых уравнений, возникающих в теории сверхпроводимости. Они задаются гладкими парами (A, Φ), состоящими из (электромагнитного) калибровочного потенциала A и скалярного поля Хиггса Φ на плоскости $\mathbb{C}$. С точностью до калибровочной эквивалентности вихревые решения параметризуются нулями поля Хиггса Φ, так что пространство модулей N-вихревых решений можно отождествить с $\mathbb{C}^N$.

Динамика вихрей на $\mathbb{C}$ задается гиперболическим функционалом действия Гинзбурга-Ландау. Приближенно динамика N вихрей описывается геодезическими на $\mathbb{C}^N$ в метрике, определяемой кинетической энергией модели. К сожалению, эту метрику не удается вычислить в явном виде. Однако в специальном случае симметричного столкновения N вихрей можно показать, не используя явного вида метрики, что после столкновения их траектории поворачиваются на угол π/N. В частности, в случае двух вихрей их траектории после лобового столкновения поворачиваются на угол $\pi/2$, т. е. происходит рассеяние под прямым углом. (Этот последний результат был уже получен ранее в ряде работ.)

О C^1-продолжении и C^1-отражении субгармонических функций

П. В. Парамонов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Самосопряженность в существенном волнового оператора на многообразиях типа Фридмана

Е. В. Писковский

Московский физико-технический институт (государственный университет)

piskovskiev@yahoo.com

К настоящему моменту построена хорошо развитая спектральная теория для эллиптических дифференциальных операторов [1]. Для гиперболических операторов задача на собственные значения рассмотрена в [2] - [4].

Формулировка задачи на собственные значения для гиперболического волнового оператора, определенного в пространстве суммируемых с квадратом функций над псевдоримановым многообразием, приведена в [2], [3]. Пусть $(M, g_{\mu\nu})$ - это $(n+1)$ - мерное псевдориманово многообразие с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, требуется найти значения вещественного параметра λ и такие собственные функции $f \in C^2(M)$, что

$$\Box f + \lambda f = 0, \tag{1}$$

$$\int\limits_M f^2 \sqrt{g} dx < \infty, \tag{2}$$

где g - модуль определителя матрицы $g_{\mu\nu}$, а $\Box$ - волновой оператор на многообразии $(M, g_{\mu\nu})$.

Волновой оператор на многообразии типа Фридмана рассмотрен в работах [3], [4].

Теорема.

Пусть $(M, g_{\mu\nu})$ - $(n+1)$ - мерное многообразие типа Фридмана. Рассмотрим волновой оператор $\Box$ с областью определения $D(\Box) = C_0^\infty(M)$. Тогда оператор $\Box$ имеет единственное самосопряженное расширение в $L^2(M)$.

Автор благодарен чл.-кор. РАН И.В. Воловичу за совместную работу над этим докладом.

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

Список литературы

[1] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1981.

[2] В.В. Козлов, *Суммируемые с квадратом решения уравнения Клейна-Гордона на пространстве де Ситтера*, УМН, 1987, Т. 42, Вып. 4, стр. 171.

[3] И.В. Волович, В.В. Козлов, *О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна - Гордона на многообразиях*, Доклады РАН, 2006, т.408, №3,стр. 317-320.

[4] V.V. Kozlov, I.V. Volovich, *Finite Action Klein-Gordon Solutions on Lorentzian Manifolds*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.3:1349-1358,2006; http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603111.

Квантование универсального пространства Тейхмюллера

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

sergeev@mi.ras.ru

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ определяется как фактор пространства квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 (т.е. гомеоморфизмов S^1, продолжающихся до квазиконформных отображений круга Δ) по модулю преобразований Мебиуса (т.е. дробно-линейных автоморфизмов Δ). Оно обладает естественной комплексной структурой, индуцированной вложением $\mathcal{T}$ в виде открытого подмножества в комплексное банахово пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ. Универсальное пространство Тейхмюллера содержит все классические пространства Тейхмюллера, ассоциированные с компактными римановыми поверхностями конечного рода в виде комплексных подмногообразий. С другой стороны, однородное пространство $\mathcal{S} := \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, являющееся фактором группы диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по модулю преобразований Мебиуса, можно рассматривать как "гладкую" часть $\mathcal{T}$.

Пространство $\mathcal{S}$ можно проквантовать, воспользовавшись его вложением в гильбертов диск Зигеля $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$. При таком вложении группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ реализуется в виде подгруппы симплектической группы Гильберта–Шмидта, действующей на диске $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ посредством операторных дробно-линейных преобразований. Мы строим голоморфное фоковское расслоение над $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, наделенное проективным действием симплектической группы Гильберта–Шмидта, накрывающим ее действие на $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$. Инфинитезимальная версия указанного действия дает проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта в слое F_0 фоковского расслоения. Эту конструкцию можно рассматривать как геометрическое квантование диска Зигеля $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$. Ее сужение на $\mathcal{S}$ дает проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в фоковском пространстве F_0, задающее квантование пространства $\mathcal{S}$. Однако описанная процедура квантования не применима ко всему универсальному пространству Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Указанное пространство удается проквантовать, пользуясь "квантовым исчислением" Конна–Сулливана. Идея этого подхода состоит в том, чтобы построить представление π ассоциативной алгебры наблюдаемых в гильбертовом пространстве H, сопоставляющее дифференциалу df наблюдаемой f коммутатор $[S, \pi(f)]$ квантовой наблюдаемой $\pi(f)$ с самосопряженным оператором симметрии S, определяемым поляризацией H.

О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса

С. П. Суетин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

suetin@mi.ras.ru

Классические результаты Г. Сегё [1, гл. XII] и С. Н. Бернштейна [2] (см. также [1, гл. XII]) об асимптотике ортогональных многочленов формулировались и доказывались для случая одного отрезка $\Delta = [-1, 1]$ и веса вида

$$\rho(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\rho_0(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{1}$$

где ρ_0 – суммируемая вещественная функция, $\rho_0 > 0$ п.в. на Δ.

В связи с изучением сходимости чебышёвских непрерывных дробей [3] (или, иначе говоря, диагональных аппроксимаций Паде) возникает задача об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на отрезке Δ относительно *комплексного* веса $\rho_0 \colon \Delta \to \mathbb{C}$. К такой задаче естественным образом приводит разложение в чебышёвскую непрерывную дробь простейших алгебраических функций вида

$$f(z) = r_1(z) + \frac{r_2(z)}{\sqrt{z^2 - 1}}, \qquad f \in \mathcal{H}(\infty),$$

где r_1, r_2 – комплексные рациональные функции (см., например, [4], [5]).

Для многочленов, ортогональных на отрезке $\Delta = [-1, 1]$ относительно *комплексного* веса ρ_0, получена формула сильной асимптотики, справедливая в некоторой окрестности Δ. В частности, для веса $\rho_0(x) = e^{ix}$, $x \in \Delta$, из этой формулы вытекает индивидуальное описание асимптотического поведения каждого из n нулей n-го ортогонального многочлена Q_n при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Если $\rho_0(x) = e^{-ibx}$, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то:*

1) при $n \geq n_0$ все нули $z_{k,n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, многочлена Q_n простые, лежат или в верхней полуплоскости $\Im z > 0$ при $b > 0$, или в нижней полуплоскости $\Im z < 0$ при $b < 0$ и удовлетворяют неравенствам $c_1/n^2 < g(z_{k,n}, \infty) < c_2/n$, где постоянные $c_1, c_2 > 0$ зависят от b;

2) равномерно по $k = 0, \ldots, n-1$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$z_{k,n} = t_{k,n} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr) + i\biggl(\frac{b}{2n} \sin^2 \theta_{k,n} + O\Bigl(\frac{\sin^2 \theta_{k,n}}{n^3}\Bigr)\biggr), \qquad n \to \infty, \tag{2}$$

где $\theta_{k,n} = \pi/(2n) + \pi k/n$ *и под "*$O(\cdot)$*" понимается вещественнозначная функция;*

3) для нулей Q_n*, ближайших к концам отрезка* Δ*, имеем:*

$$z_{0,n} = t_{0,n} + i\frac{b\pi^2}{8n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \qquad z_{n-1,n} = t_{n-1,n} + i\frac{b\pi^2}{8n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big). \quad (3)$$

Соотношение (2) означает, что образы $\zeta_{k,n} = \Phi(z_{k,n})$ нулей Q_n в плоскости переменного $\zeta = \Phi(z)$ асимптотически при $n \to \infty$ располагаются в корнях $2n$-й степени из -1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3906.2008.1).

Список литературы

[1] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962.

[2] С. Н. Бернштейн, *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*, 1937, ОНТИ, Харьков.

[3] П. Л. Чебышёв, О непрерывных дробях, Ученые записки Имп. Академии Наук, 1855, Т. III С. 636–664; P. Tchébycheff, Sur les fractions continues, Journ. de Math. Pures et Appl. Sér. 2, 1858, Vol. 3 P. 289–323; Полное собрание сочинений, Т. II М.–Л. Изд-во АН СССР, 1948, С. 103–126.

[4] А. А. Гончар, О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций , Матем. сб. , 1975 , Т. 97(139) , вып. 4(8) , С. 607–629 http://mi.mathnet.ru/rus/sm3802; http://www.zentralblatt-math.org/zmath/search/?an=Zbl 0341.30029

[5] A. P. Magnus, Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants, J. of Comput. and Appl. Math., Vol. 19, Issue 1, P. 23–38, 1987; http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=901209; http://www.zentralblatt-math.org/zmath/search/?an=Zbl 0619.41014.

Об одном интегро-дифференциальном уравнении типа свертки второго порядка

Ц. Э. Терджян

Институт математики НАН Армении

terjyan73@mail.ru

В работе исследуется следующее интегро-дифференциальное уравнение второго порядка:

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + Af(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty K(x-\tau)\lambda(\tau)f(\tau)d\tau, \quad x > 0 \qquad (1)$$

относительно искомой функции $f(x)$, с начальным условием

$$f(0) = r_0 \geq 0. \qquad (2)$$

Здесь $A > 0$ - заданный числовой параметр, $0 \leq K \in L_1(-\infty, +\infty)$, $0 \leq \lambda(\tau) \leq 1$, $\tau \in (0, +\infty)$ - измеримая функция, а g - неотрицательная функция из $L_1(0, +\infty)$. Изучение уравнения (1) представляет собой известный интерес в разных задачах естествознания. Отметим, что в случае $\lambda(t) \equiv 1$ уравнение (1) достаточно подробно изучалось в работах [1-2]. Решение задачи мы будем искать в следующем классе функций:

$$\aleph = \{f : f' \in AC(0, +\infty),\ \forall \epsilon > 0, \lim_{x\to\infty} e^{-\epsilon x} f(x) = 0\}.$$

Специльное трехфакторное разложение соответствующего интегро-дифференциального оператора позволяет доказать следующие структуральные теоремы:

Теорема 1. *Если* $A > \mu$, *где* $\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau, \quad 0 \leq \lambda(\tau) \leq 1$, $\tau \in (0, +\infty)$, $0 \leq g(x) \in L_1(0, +\infty)$, *то уравнение (1) в пространстве Соболева* $W_1^2(0, +\infty)$ *имеет положительное решение следующей структуры:*

$$f(x) = r_0 e^{-\beta x} + \int\limits_0^x e^{-\beta(x-t)} F(t)dt \qquad (3)$$

где β – положительное число, $0 \leq F \in W_1^1(0,\infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $A = \mu$, $0 \leq \lambda(\tau) \leq 1$, $\tau \in (0,+\infty)$, $0 \leq g(x) \in L_1(0,+\infty)$ *и сходится следующий интеграл:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|K(t)dt < +\infty.$$

Тогда справедливы следующие факты:

a) Если $\nu(K) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tK(t)dt > 0$, то уравнение (1) в $\aleph$ имеет положительное решение вида:

$$f(x) = r_0 e^{-\beta x} + \int_0^x e^{-\beta(x-t)}(R_1(t) + R_2(t))dt \tag{4}$$

где $R_1 \in L_1(0,+\infty)$, $R_2 \in C_M(0,+\infty)$ а $C_M(0,+\infty)$ - это пространство непрерывных функций на $(0,+\infty)$, имеющих конечный предел в $+\infty$.

b) Если $\nu(K) = 0$, $m(g) = \int\limits_0^{\infty} xg(x)dx < +\infty$, то уравнение (1) в $\aleph$ имеет положительное решение вида (4).

c) Если $\nu(K) < 0$, , $m(g) < +\infty$, то уравнение (1) в пространстве Соболева $W_1^2(0,+\infty)$ имеет положительное решение вида (3).

Список литературы

[1] N. B. Engibaryan, A. Kh. Khachatryan. Sbornik mathematics, 198, No 6 pp. 839-855, 2007.

[2] Х. А. Хачатрян. Известия НАН Армении, математика (в печати).

Диффузия Арнольда: механизмы и результаты

Д. В. Трещёв
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
treschev@mi.ras.ru

Диффузией Арнольда в конечномерных гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, принято называть возможность изменения медленных переменных (переменных действия) на решении на величину порядка единицы вне зависимости от величины возмущения.

Планируется дать обзор состояния дел в этой области гамильтоновой динамики. Обсудить основные методы и результаты.

Об оценках для одного семейства функций с приложениями в квантовой механике

А. С. Трушечкин
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
trushechkin@mi.ras.ru

Рассмотрим следующее семейство функций из $L_2(-\pi,\pi)$:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(\alpha)} e^{in(x-b)},$$

где $\alpha \in (0,\infty)$,

$$a_n^{(\alpha)} = \left[\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} |\varphi_\alpha(p)|^2 \, dp \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_\alpha(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} \exp\left(-\frac{(p-q)^2}{4\alpha^2} - ip\,b \right),$$

b, q – вещественные параметры.

Положим

$$A_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} (x-b)^2 |\psi_\alpha(x)|^2 \, dx,$$

$$B_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-q)^2 |a_n^{(\alpha)}|^2 \, dx.$$

Теорема. *Для построенного семейства функций $\psi_\alpha(x)$, $\alpha \in (0, \infty)$, выполнены следующие оценки:*

$$A_\alpha \leq C/\alpha, \quad B_\alpha \leq \alpha^2 + \delta,$$

где C и δ – некоторые положительные константы, которые не зависят от α.

Теорема имеет приложения в квантовой механике систем на отрезке. Функции $\psi_\alpha(x)$ из построенного семейства мы назвали квазикогерентными, поскольку они построены на основе известных когерентных состояний на прямой. Величины A_α и B_α имеют смысл дисперсий координаты и импульса соответственно, и теорема устанавливает оценки для них. С увеличением α улучшается оценка для дисперсии координаты и ухудшается оценка дисперсии импульса, что в определённом смысле аналогично соотношению неопределённостей Гейзенберга. Константы C и δ в теореме могут быть вычислены, что позволяет получить численные оценки дисперсий на наномасштабах.

Работа выполнена совместно с И.В. Воловичем.

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

Об одном интегро-дифференциальном уравнении с частными производными

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении

aghavard@hotbox.ru, Khach-82@rambler.ru

Рассматривается следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}+q(x)f(t,x)=\int\limits_0^\infty K(x,x')f(t,x')dx', \quad x\in(0,\infty) \tag{1}$$

относительно искомой функции распределения $f(t,x), q(x)$ - заданная неотрицательная измеримая функция на $[0,\infty)$, $\quad 0\le K(x,x')$ -определена на $[0,\infty)\times[0,\infty)$.

Уравнением (1) описывается задача распределения дохода в стране (см. [1]). Функция $q(x)$ - характеризует средние сбережения, рост капиталов, "потери"дохода в связи с банкротством и т.д. $K(x,x')$- функция перераспределения, обусловленная разными экономическими эффектами.

Будем предполагать, что ядро удовлетворяет условиям

$$\mu_1(k)=\underset{x'\in(0,+\infty)}{supess}\int\limits_0^\infty K(x,x')dx<+\infty,$$

$$\mu_2(k)=\underset{x\in(0,+\infty)}{supess}\int\limits_0^\infty K(x,x')dx'<+\infty.$$

Случай показательного распределения

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $0\le q(x)$ -ограниченная функция на $(0,\infty)$, тогда уравнение (1) обладает однопараметрическим семейством решений вида*

$$f_\lambda(x,t)=e^{\lambda t}[c_0(\lambda)e^{-\alpha(\lambda)x}+\int\limits_0^x e^{-\alpha(x-\xi)}F_\lambda(\xi)d\xi] \tag{2}$$

$\lambda\in(\mu_1-\delta,+\infty)$ *и* $F_\lambda(\xi)\in L_1(0,+\infty)$,
где $\delta=\underset{x\in(0,\infty)}{infess}\,q(x), \alpha(\lambda)=\underset{x\in(0,\infty)}{supess}\,q(x)+\ \lambda.$

Случай нормального распределения

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $q(x) = bx - q_0(x)$, b *-положительное число,* $0 < \delta_1 \le q_0(x) \in L_\infty(0, +\infty)$, $\delta_1 = \underset{x\in(0,+\infty)}{infess}\, q_0(x)$, *тогда уравнение (1) обладает однопараметрическим семейством решений вида:*

$$f_\lambda(x,t) = e^{\lambda t}[c_0(\lambda)e^{-\frac{\beta(\lambda)x^2}{2}} + \int\limits_0^x e^{-\beta(\lambda(x^2-\xi^2))}F_\lambda(\xi)d\xi] \qquad (3)$$

где $\mu_1 - \sqrt{\frac{2b}{\pi}} + \delta_0 < \lambda < \delta_1$, *и* $F_\lambda(\xi) \in L_1(0, +\infty)$.

Здесь $\delta_0 = \underset{x\in(0,+\infty)}{supess}\, q_0(x)$, $\beta \in (b, \frac{2b^2}{\pi(\mu_1+\delta_0-\lambda)^2})$.

Теорема 3. *Если* $0 \le q(x)$*-ограниченная функция на* $(0, +\infty)$ *и* $\lambda = \mu_2 - \delta$, $\exists\ 0 \le K_0 \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\mu_2(K) = ||K_0||_{L_1}$, $\nu(K_0) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xK_0(x)dx < -\frac{\mu_2}{\alpha(\lambda)}$ *такое, что* $K(x,t) \ge K_0(x-t)$, $\forall (x,t) \in R^2_+$ *, то уравнение (1) имеет нетривиальное решение вида (2), где* $F_\lambda(\xi) \in L_\infty(0, +\infty)$.

Заметим, что в случае $\lambda = \mu_2 - \delta$, *решение уравнения (1) перестает быть функцией распределения и тем самым "лишается"экономического смысла.*

Поэтому "экономическое"решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$f(x,t) = \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_\lambda(x,t)d\lambda,$$

где в случае показательного распределения $\gamma_1 = \mu_1 - \delta$, $\gamma_2 = \infty$, *а в случае нормального распределения* $\gamma_1 = \mu_1 + \delta_0 - \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$, $\gamma_2 = \delta_1$.

Заметим, что функции распределения, задаваемые согласно (2) и (3) являются обобщениями законов показательного и нормального распределения соответственно.

[1] Sargan J. D. The distribution of wealth. Econometrica, No 25, pp. 568-590, 1957.

Некоторые интегральные уравнения типа Урысона и Гаммерштейна на полуоси

Х. А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении

Khach-82@rambler.ru

Рассматриваются следующие нелинейные интегральные уравнения:

a) Уравнение Урысона на полуоси:

$$f(x) = \int_0^\infty K(x,t,f(t))dt, \quad x \in (0,+\infty) \tag{1}$$

относительно искомой функций $f(x)$, где $0 \le K \in C(\Omega)$, $\Omega \equiv R_+ \times R_+ \times R$, $K(x,t,y) \uparrow$ по y.

b) Уравнение типа Гаммерштейна с консервативным ядром:

$$\varphi = \int_0^\infty \widetilde{K}(x,t) Y(\varphi(t))dt, \quad x \in (0,+\infty), \tag{2}$$

где $K(x,t)$ - имеет следующую структуру:

$$\widetilde{K}(x,t) = \frac{1}{2}\int_a^b \alpha(x,s)e^{-\alpha(x,s)|x-t|}d\sigma(s). \tag{3}$$

Здесь $\alpha(x,s) \ge \beta > 0$ - измеримая функция на $(0,+\infty)\times[a,b)$, $0 \le a < b \le +\infty$, $\sigma \uparrow$ на $[a,b)$, причем

$$\int_a^b d\sigma(s) = 1. \tag{4}$$

Здесь $Y(x) = x - \omega(x)$, где

$$0 \leq \omega \in L_1(0, +\infty) \bigcap C[0, +\infty), \quad \omega \downarrow (0, +\infty). \tag{5}$$

Из (4), (5) сразу следует, что ядро $\widetilde{K}(x,t)$ удовлетворяет условию консервативности:

$$\underset{x \in (0,+\infty)}{supess} \int_0^\infty \widetilde{K}(x,t)dt = 1. \tag{6}$$

Уравнения (1), (2) кроме самостоятельного математического интереса представляют известный интерес в эконометрике, в кинетической теории газов, в механике, в теории популяции. Уравнение Урысона в основном изучалось на конечном промежутке в предположении, что оператор Урысона и его линейная миноранта являются вполне непрерывными. В настоящей работе доказывается, что если консервативный оператор Винера-Хопфа служит минорантой оператора Урысона, причем функция $K(x,t,y)$ удовлетворяет условию субстохастичности, то уравнение (1) имеет нетривиальное, неотрицательное и ограниченное решение. Точнее справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть 1)* $0 \leq K \in C(\Omega)$, $K \uparrow$ *по* y

2) существует неотрицательная функция $K_0 \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\nu(K_0) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} xK_0(x)dx < 0$ *такая что* $K(x,t,y) \geq K_0(x-t)y$, $\forall (x,t,y) \in \Omega$,

3) существует число $\eta > 0$, *такое что* $\underset{x \in (0,+\infty)}{supess} \int\limits_0^\infty K(x,t,\eta)dt \leq \eta$.

Тогда уравнение (1) имеет ненулевое, неотрицательное и ограниченное решение $f(x)$, *причем* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \eta$.

В том случае, когда $\widetilde{K}(x,t) \equiv K^*(x-t)$, причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^*(x)dx = 1$ и $\nu(K^*) = 0$, уравнение (2) исследовалось в работе [1], а когда

$\omega(x) \equiv 0$ и ядро $\widetilde{K}$ представлена в виде (3), уравнение (2) изучалось в [2]. Там накладывая некоторые условия на функцию $\alpha(x,s)$, было доказано разрешимость этого уравнения и найдена асимптотическое поведение в $+\infty$. Нижеприведенная теорема является обобщением результатов работы [2], в случае когда $\omega(x) \neq 0$. Доказывается следующая.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*

a) существуют $\underset{x\in(0,+\infty)}{infess}\ \alpha(x,s) = \beta > 0, \alpha_0(s) = \underset{x\in(0,+\infty)}{supess}\ \alpha(x,s) < +\infty$,

b) сходится интеграл: $\int\limits_0^\infty \int\limits_a^b (1 - \frac{\beta}{\alpha(x,s)}) d\sigma(s) dx < +\infty$.

Тогда, если ω *- удовлетворяет условию (5), то уравнение (2) имеет нетривиальное и неотрицательное решение с асимптотикой* $\varphi(x) = O(x)$, *при* $x \to +\infty$.

[1] Л. Г. Арабаджян. Известия НАН РА, математика т. 32, No 1, стр.21-28, 1997г.

[2] Х. А. Хачатрян. Известия НАН РА, математика, т. 37, No 4, стр. 73-80, 2002г.

Квазиголоморфные отображения

Е. М. Чирка

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

chirka@mi.ras.ru